

Vzorová zkoušková písemka z PST

1. Pro měsíční příjem (v tis. USD) dospělého člověka X v jistém velkoměstě platí, že pro libovolnou mez $a \geq 0.5$ je $P(X > a) = \frac{1}{(a+0.5)^{1.25}}$.

- (a) Je X spojitě/diskrétně rozdělená? Obě odpovědi zdůvodněte.
- (b) Kolik procent lidí vydělá více než 5000 USD za měsíc? Kolik procent lidí, kteří vydělají měsíčně více než 2000 USD vydělá více než 5000 USD?
- (c) Určete průměrný měsíční příjem a medián, tj. číslo $m \in \mathbb{R}$, pro které platí $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$ a $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$.

2. Student přijde na zkoušku v podroušeném stavu. Má štěstí, zkouška sestává pouze z uzavřených otázek, na které je odpověď vždy ano nebo ne. U každé otázky tipuje odpověď veskrze náhodně a nezávisle, ale protože si něco ze semestru matně pamatuje, u každé otázky má pravděpodobnost, že odpoví správně 55%. Aby uspěl, potřebuje získat polovinu bodů (každá otázka je za jeden bod). Kolik musí být v testu nejméně otázek, aby pravděpodobnost, že student uspěje, byla alespoň 80% ?

3. Jistá náhodná veličina má hustotu s parametrem $\theta > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (a) O jaké se jedná rozdělení? Vypočtete střední hodnotu veličiny.
 - (b) Provedli jsme sérii 8 nezávislých měření s výsledky: $-1.089, -2.624, -1.582, -0.139, 1.984, -1.851, -2.220, 1.103$. Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr θ .
4. V populaci je 2% nemocných jistou chorobou. Test nemoci je u 1% zdravých falešně pozitivní a u 5% nemocných falešně negativní.
- (a) Kolik procent populace má pozitivní test?
 - (b) Jaká je pravděpodobnost, že pacient s pozitivním testem je nemocný?
 - (c) Léčba je zatěžující. Pokud má pacient pozitivní test, otestujeme jej proto ještě jednou (testování probíhá nezávisle). Jaká je pravděpodobnost, že je pacient s dvěma pozitivními testy nemocný?

5. Chceme testovat, zda spotřeba paliva jistého vozu odpovídá datům udávaných výrobcem. Na testovací jízdu proto vybereme 7 různých aut stejného typu a naměříme jejich spotřeby v l/100km: 7.33, 7.04, 7.28, 8.32, 7.65, 7.28, 7.28. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte, zda udávaná spotřeba 7.2l/100km odpovídá reálným datům. Předpokládejte normální rozdělení. Zvolte jednostrannou variantu testu.